УРОК 4

Тема уроку: Поняття похідної. Задачі, що приводять до поняття похідної. Таблиця похідних

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.22

Перевірка домашнього завдання

№ 21.2 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = -5x + 2$.

№ 21.4 $y = -5x + 2$.

Пояснення нового матеріалу

У курсі алгебри за 8 та 9 клас ви ознайомились із темою «Функції». Пригадайте цей матеріал, пройшовши за посиланнями та виконавши вправи: https://learningapps.org/2508300 https://learningapps.org/2707995 .

З усіх способів задання функції найбільш наочним є графічний. У попередніх класах ми навчилися «читати» графіки, тобто визначати властивості функції за її графіком.

За допомогою похідної можна розв'язати й обернену задачу: побудувати графік функції, знаючи її властивості.

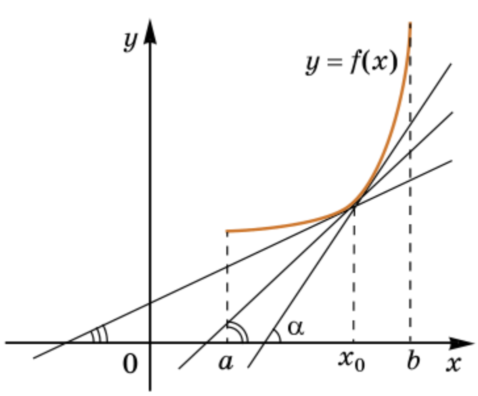
Одне з основних завдань під час дослідження функції і побудови її графіка – це знаходження проміжків зростання, спадання та сталості функції. Таке дослідження можна провести за допомогою похідної.

Нагадаємо, що

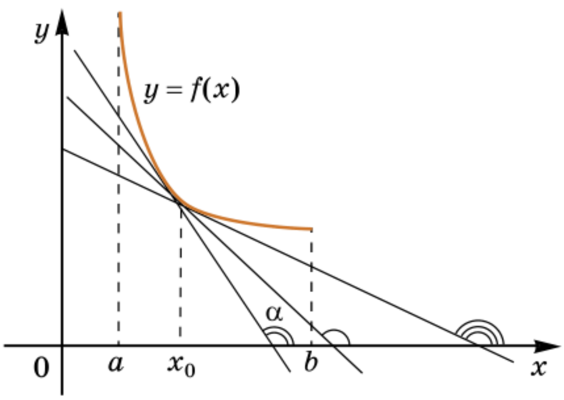
функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції;

функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Проміжки, на яких функція зростає чи спадає, ще називають *проміжками монотонності*.



Мал. 21.1



Мал. 21.2

На малюнку 21.1 зображено зростаючу на проміжку $(a; b)$ функцію $y = f(x)$. У якій би точці цього проміжку ми не провели дотичну до графіка функції, кут α, який вона утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис, буде гострим. Оскільки α – гострий, то $\text{tg}\alpha > 0$. Але $\text{tg}\alpha = f'(x_0)$, де x_0 – абсциса точки дотику, тому для будь-якої точки $x_0 \in (a; b)$ справджується умова $f'(x_0) > 0$.

На малюнку 21.2 зображено графік спадної на проміжку $(a; b)$ функції $y = f(x)$. У кожній точці цього проміжку дотична до графіка функції утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис кут α, що є тупим. Оскільки α – тупий, то $\text{tg}\alpha < 0$ і тому $f'(x_0) < 0$ для кожної точки $x_0 \in (a; b)$.

Отже, знаючи, зростає чи спадає функція на певному проміжку, можна визначити знак похідної на цьому проміжку. А можна і навпаки, за знаком похідної функції на проміжку визначити, зростає ця функція, спадає чи є сталою на цьому проміжку.

Теорема 1 (ознака сталості функції). **Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.**

Теорема 2 (ознака зростання, спадання функції). **Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$. Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a; b)$.**

Строгі доведення цих теорем є досить громіздкими, тому ми їх не наводимо. Зауважимо лише, що теорему 1 ще називають необхідною і достатньою умовою сталості функції, а теорему 2 – достатньою умовою зростання або спадання функції.

Критичними точками **функції називають внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує або дорівнює нулю.**

Для функції $y = x^2$ точка $x = 0$ є критичною, а для $y = \dfrac{6}{x^2}$ – не є критичною, оскільки не належить області визначення функції. Отже, точки, які не належать області визначення,

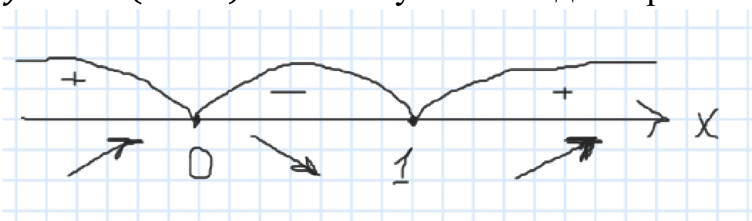
Алгоритм дослідження функції $f(x)$ на зростання і спадання:
1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Поділити знайденими критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них (для цього достатньо визначити знак похідної $f'(x)$ в одній довільній точці проміжку).
5) За знаком похідної визначити проміжки зростання і спадання функції.

Виконання вправ на осмислення та закріплення вивченого матеріалу

За вказаним вище алгоритмом виконаємо № 22.1 на знаходження проміжків зростання і спадання.

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

1. Областю визначення даної функції є вся числова пряма, тобто $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Знайдемо похідну даної функції:
   $y' = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 6x^2 - 6x$.
3. Знайдемо критичні точки, для цього похідну прирівняємо до нуля і розв'яжемо рівняння:
   $6x^2 - 6x = 0$; $6x(x-1) = 0$; $6x = 0$ або $x - 1 = 0$.
   $x_1 = 0$ $x_2 = 1$.
4. Нанесемо ці критичні точки на числову пряму і з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків. Для цього розглянемо функцію $y' = 6x(x-1)$ та застосуємо метод інтервалів.



5. Запишемо відповідь:
   функція зростає на проміжку при $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$;
   функція спадає на проміжку при $x \in [0; 1]$.

Тепер можна переходити до складніших завдань з № 22.3.

2) Знайти проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{3x+5}{2-x}$.

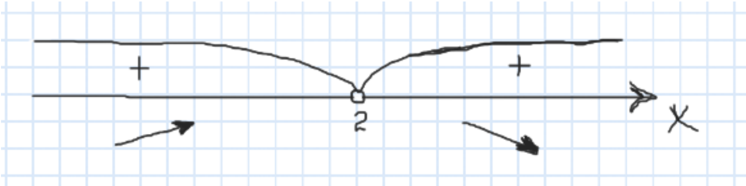
1. Областю визначення даної функції є вся числова пряма, окрім точки $x = 2$, тому що при цьому значенні знаменник дробу перетворюється на нуль, що не допустимо. Отже $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Знайдемо похідну даної функції:

$$y' = \frac{(3x+5)'(2-x) - (3x+5)(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{3(2-x) - (3x+5)(-1)}{(2-x)^2} =$$
$$= \frac{6 - 3x + 3x + 5}{(2-x)^2} = \frac{11}{(2-x)^2};$$

3. Знайдемо критичні точки, для цього похідну прирівняємо до нуля і розв'яжемо рівняння:

$\frac{11}{(2-x)^2} = 0.$ Пригадаємо правило, що дріб дорівнює нулю, коли чисельник цього дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. В даному випадку чисельник дробу $11 \neq 0$, а знаменник дробу не існує при $x = 2$.

4. Тому на числову пряму наносимо точку $x = 2$ виколотою, бо вона не входить в область визначення даної функції.



5. Запишемо відповідь:
   функція зростає на проміжку при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Домашнє завдання: § 3 п.22, № 22.2 та № 22.4 (2).